2.9.15 Věty o logaritmech II

Předpoklady: 2914

Pro každé $a > 0$; $a \neq 1$, pro všechna kladná čísla r a pro všechna reálná čísla s platí: $\log_a r^s = s \cdot \log_a r$.

Vzorec samozřejmě platí pro libovolný druh mocniny: $\log_a \sqrt[3]{x^4} = \log_a x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\log_a x$.

Při zápisu je potřeba rozlišovat:

- $\log_a^s r = \left(\log_a r\right)^s$ - umocňujeme hodnoty logaritmu.
- $\log_a r^s = \log_a \left(r^s\right)$ - umocňujeme číslo, ze kterého máme určit logaritmus.

Př. 1: Zapiš jako násobek $\log x$:

a) $\log x^2 + \log x^3$ b) $\log x^4 + \log \frac{1}{x^3}$ c) $\log \sqrt{x} + \log \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

a) $\log x^2 + \log x^3 = 2\log x + 3\log x = 5\log x$ b) $\log x^4 + \log \frac{1}{x^3} = 4\log x - 3\log x = \log x$

c) $\log \sqrt{x} + \log \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2}\log x - \frac{1}{3}\log x = \frac{1}{6}\log x$

Shrňme si, co znamená logaritmus. $\log_a r$ je:

- číslo, jehož hodnotu jsme schopni spočítat (číslo, na které musíme umocnit *a*, aby vyšlo *r*),
- číslo, jehož hodnota není ve většině případů ihned zřejmá,
- číslo, k jehož určení můžeme využít vzorce $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$,

  $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$, $\log_a r^s = s\log_a r$.

Logaritmus hodně připomíná odmocninu. Pouze vzorce pro odmocninu platí jiné:
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí poznámka k logaritmům je sice „nematematická“, ale potřebná. Snaží se vrátit logaritmy „trochu na zem“ a přirovnat je k něčemu, s čím se studenti už smířili. Pokud by ji studenti chápali do důsledků, neměli by s bodem c) následujícího příkladu problémy.

Př. 2: Zjednoduš: a) $\log\sqrt{5}+\log\frac{1}{5}$ b) $\log_3\sqrt{2}+\log_3\frac{1}{2}+\log_3 8$ c) $\frac{\log_3 125}{\log_3\sqrt{5}}$.

a) $\log\sqrt{5}+\log\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\log 5-\log 5=-\frac{1}{2}\log 5$

b) $\log_3\sqrt{2}+\log_3\frac{1}{2}+\log_3 8=\log_3 2^{\frac{1}{2}}+\log_3 2^{-1}+\log_3 2^3=\frac{1}{2}\log_3 2-\log_3 2+3\log_3 2=$
$=\frac{5}{2}\log_3 2$

c) $\frac{\log_3 125}{\log_3\sqrt{5}}=\frac{\log_3 5^3}{\log_3 5^{\frac{1}{2}}}=\frac{3\cdot\log_3 5}{\frac{1}{2}\cdot\log_3 5}=6\cdot\frac{\log_3 5}{\log_3 5}=6$

Pedagogická poznámka: Bod c) je pro studenty opravdovým oříškem. Objevují se dvě chyby: $\frac{\log_3 125}{\log_3\sqrt{5}}=\log_3 125-\log_3\sqrt{5}$ (nemístné použití vzorce pro rozdíl logaritmů) a $\frac{\log_3 125}{\log_3\sqrt{5}}=\frac{\log_3 5^3}{\log_3 5^{\frac{1}{2}}}=\log_3 5^{3-\frac{1}{2}}$ (ignorování faktu, že logaritmus je nějaké číslo, jehož hodnota není nijak přímočaře vidět). Opět je třeba zopakovat předchozí poznámku, pokud se studenti naučí přistupovat k logaritmu jako číslu, které není možné libovolně „rozmontovávat“, získáte lepší nástupní pozici pro goniometrické funkce.

Př. 3: Zapiš jedním logaritmem:

a) $\log_3 2+1$ b) $2\log a+2$ c) $2\log_2 a-\log_2 b+\frac{1}{3}\log_2 c-2$.

a) $\log_3 2+1=\log_3 2+\log_3 3=\log_3 6$

b) $2\log a+2=\log a^2+\log 100=\log 100a^2$

c) $2\log_2 a-\log_2 b+\frac{1}{3}\log_2 c-2=\log_2 a^2-\log_2 b+\log_2\sqrt[3]{c}-\log_2 4=\log_2\frac{a^2\sqrt[3]{c}}{4b}$

Pedagogická poznámka: U bodu a) je třeba být ostražitý. Pokud studenti nebudou schopni napsat $1=\log_3 3$, je lepší jim to poradit a nemařit příliš mnoho času.

Př. 4: Vyjádři pomocí $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$ a $\log_2 d$: $\log_2\frac{4\sqrt{a^3b}}{c^4d}$.

$\log_2\frac{4\sqrt{a^3b}}{c^4d}=\log_2\frac{4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{c^4d}=\log_2 4+\frac{3}{2}\log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 b-4\log_2 c-\log_2 d$

Př. 5: Vypočti:

a) $\log_\pi \log_2 \log_3 9$ b) $\log_6^2 3 + \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6 2 + \log_6 1$

a) $\log_\pi \log_2 \log_3 9 = \log_\pi \log_2 2 = \log_\pi 1 = 0$

b) $\log_6^2 3 + \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6 2 + \log_6 1 = \log_6 3 \cdot \log_6 3 + \log_6 3 \cdot \log_6 2 + \log_6 2 + 0 =$
$\log_6 3 (\log_6 3 + \log_6 2) + \log_6 2 = \log_6 3 (\log_6 6) + \log_6 2 = \log_6 3 \cdot 1 + \log_6 2 = \log_6 6 = 1$

Př. 6: Nakresli graf funkce $y = \log_2 x^2$

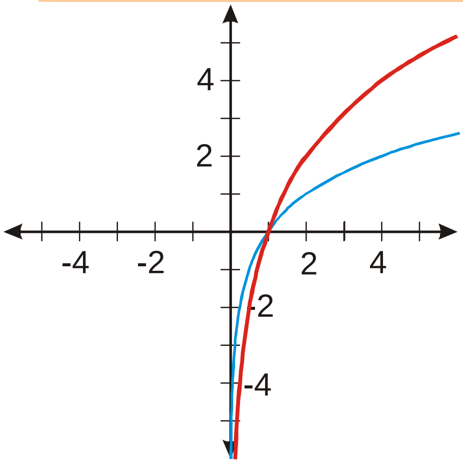
Problém: Přečíslování osy x je nad naše síly $\Rightarrow$ zkusíme úpravu výrazu v předpisu funkce.
$y = \log_2 x^2 = 2 \cdot \log_2 x$

Platí: $y = 2 \cdot \log_2 x = 2 \cdot f(x)$

Zvolíme x.

Nakreslíme funkci $y = f(x) = \log_2 x$.

Nakreslíme funkci $y = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot \log_2 x$.



Př. 7: Nakresli graf funkce $y = \log_2 2x$:

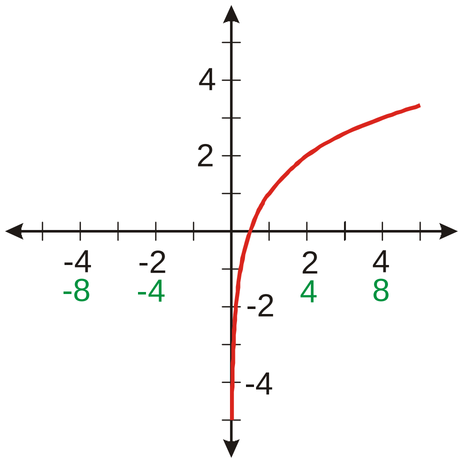
a) bez použití vzorce pro součin uvnitř logaritmu,
b) s použitím vzorce pro součin uvnitř logaritmu.

a) Platí: $y = \log_2 2x = f(2x)$.

Zvolíme x.

Vypočteme $2x$.

Nakreslíme funkci $y = f(2x) = \log_2 2x$.



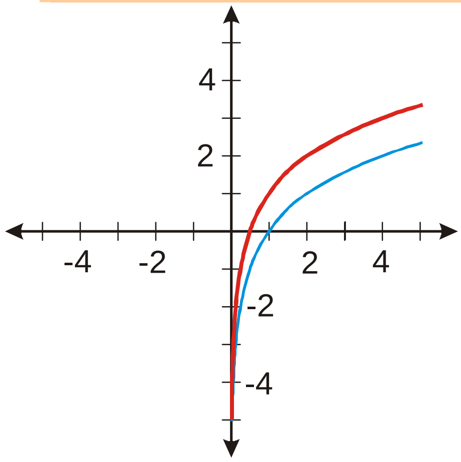
b) Platí: $y = \log_2 2x = \log_2 x + \log_2 2 = \log_2 x + 1$.

$y = \log_2 x + 1 = f(x) + 1$

Zvolíme x.

Nakreslíme funkci $y = f(x) = \log_2(x)$.

Nakreslíme funkci $y = f(x) + 1 = \log_2(x) + 1$.



V obou případech jsme získali stejný graf, což je samozřejmé a jenom to potvrzuje správnost vzorce pro součin uvnitř logaritmu.

Př. 8: Petáková:
strana 31/cvičení 74 a) d)
strana 31/cvičení 75 a) b) c)

Shrnutí: Logaritmy převádějí umocňování na násobení.